26/3/2019

Αλγόριθμος Εναλλαγής σημείων του Remez:

Θεωρούμε ένα σύνολο σημείων $X_{n+2} \subset X_m$. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\{x_\sigma\}$ για το X_{n+2} και με x_σ για ένα από το $\{x_\sigma\}$

$$\sum_\sigma f(x_\sigma) = \sum_{x_i \in \{x_\sigma\}} f(x_i)$$

Έστω $\rho_\sigma = \max|f(x) - p_\sigma(x_\sigma)|$. Αν $|f(x_i) - p_\sigma(x_i)| \le \rho_\sigma \ \forall i$ στο X_m τότε p_σ είναι η β.ο.π. της f στον P_n.

Αν $\exists\, x_j \in X_m \setminus \{x_\sigma\}$ τ.ω. $|f(x_j) - p_\sigma(x_j)| = M > \rho_\sigma$ τότε το X_σ δεν είναι βέλτιστο σύνολο για το X_m.

Θεωρούμε το σύνολο $\{x_\mu\}$ τ.ω. $x_j \in \{x_\mu\}$, τα υπόλοιπα $n+1$ σημεία είναι τα σημεία του $\{x_\sigma\}$ εκτός από ένα ώστε το σύνολο $\{x_\mu\}$ να συνεχίζει να εναλλάσσει πρόσημο η συνάρτηση σφάλμα $e(x) = f(x) - p_\sigma(x)$.

Άρα θα εξαιρέσαμε το γειτονικό σημείο του x_σ, που η $e(x)$ έχει ίδιο πρόσημο με το $e(x_j)$ αν είναι το x_j ενδιάμεσο σημείο. Αν το x_j είναι ακραίο σημείο τότε εξαιρείται το γειτονικό του αν, έχει το ίδιο πρόσημο ή το άλλο, αν το γειτονικό έχει διαφορ. πρόσημο.

$\{x_\sigma\}$

$f(x_j) - p_\sigma(x_j) = -M < 0, \ M > \rho_\sigma$

• $+$ ρ_σ

• $-$ $-\rho_\sigma$

o x_j

• $+$ $+\rho_\sigma$

• $+$

• x_j $+M$ $-M$

$\to$ Θα αποδ. ότι $p_\nu > \bar{p}_6$, $w'(x_i) = (-1)^{n-i} |w'(x_i)|$

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}}{\sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{w'(x_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{(-1)^{n-i}|w'(x_i)|}}{\sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{(-1)^{n-i}|w'(x_i)|}} = \sum_{i=1} \frac{\frac{1}{|w'(x_i)|}}{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{|w'(x_i)|}} (-1)^i f(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i (-1)^i f(x_i), \ \lambda_i > 0, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Επομένως, το σφάλμα λ, δίνεται ως κυρτός συνδιασμός των $(-1)^i f(x_i)$

$$\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i \cdot (-1)^i p(x_i) = 0, \text{ αν } p \in P_n$$

$$p_\nu = |\lambda| = \left| \sum_\nu \lambda_\nu \cdot (-1)^\nu f(x_\nu) \right|$$

Ξεκινάμε με το $\{x_6\} \in X_m$ και πάμε στο $\{x_\nu\}$ σύμφωνα με τον αλγ. Remez.

$$= \left| \sum_\nu \lambda_\nu (-1)^\nu f(x_\nu) - \sum_\nu \lambda_\nu (-1)^\nu p_6(x_\nu) \right|$$

$$= \left| \sum_\nu \lambda_\nu (-1)^\nu (f(x_\nu) - p_6(x_\nu)) \right|$$

Η $p = f - p_6$ εναλλάσει πρόσημο στο $\{x_\nu\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η $(-1)^\nu (f(x_\nu) - f_6(x_\nu))$ διατηρεί το πρόσημο.

$$\sum_{\nu \neq j} \lambda_\nu p_6 + \lambda_j M = \sum_\nu \lambda_\nu p_6 + \lambda_j M - \lambda_j p_6 =$$

$$= p_6 + \lambda_j (M - p_6) > p_6$$

Άσκηση 5 (Βιβλίο) → SOS θέμα:

Να βρεθεί η β.ο.π. της $f \in X_5$ στον P_1, όπου $X_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	1	1	1	2	0

Χρησιμοποιώντας τον αλγ. εναλ. σημείων ξεκινώντας με $\{X_6\} = \{-2, -1, 0\}$

Λύση:

$\{X_6\} = \{-2, -1, 0\}$

$P_6(x) = a_0 + a_1 x, \quad a = \begin{bmatrix} \lambda \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

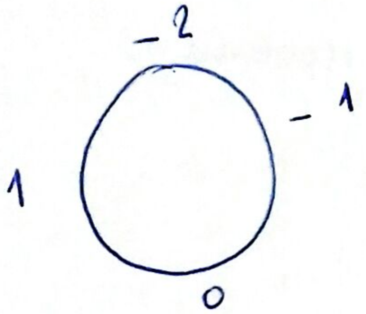
$$\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}$$

$a \quad [-1 \quad 0 \quad 0]$

$\lambda = -1 \quad , P_6(x) = 0$

$e(x) = f(x) - P_6(x) = f(x), \; H = 2 > 1 = P_6$

- $e(-2) = f(-2) = 1$
- $e(-1) = f(-1) = -1$
- $e(1) = 1$
- $e(0) = 1 \longrightarrow$ Έξοδος
- $e(1) = 2 \xleftarrow{\text{Μέγιστο}}$ Είσοδος
- $e(2) = f(2) = 0$



$\{X_4\} = \{-2, -1, 1\},$

$P_4(x) = a_0 + a_1(x),$

$a = \begin{bmatrix} \lambda \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} \underline{-1} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ & 2 & -3 & 0 \\ & 0 & \underline{3} & 1 \\ -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \end{array}$$

$\lambda = -7/6$, $P_Y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(x)$, $\rho_6 = 7/6$

$e(x) = f(x) - P_6(x) = f(x)$, $M = 2 > 1 = \rho_6$

- $e(-2) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(-2)\right) = 7/6$
- $e(-1) = -1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(-1)\right) = -7/6$
- $e(0) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}0\right) = \frac{1}{2}$
- $e(1) = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1\right) = 7/6$
- $e(2) = 0 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 2\right) = -7/6$

$p^*(x) = P_Y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x \in P_1$

$p^*(x)$ β.ο.π. εως f όπου P_2

Άσκηση 7 (Βιβλίο):

Να λυθεί η β.ο.π. εως $f \in X_5$ στον P_1, όπου $X_5 = \{-2,-1,0,1,2\}$ χρησιμοποιώντας τον αλγ. εναλ. σημείων ξεκινώντας με $\{X_6\} = \{-1,0,1\}$

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	0	1	-1	2	-2

Λύση:

$\{X_6\} = \{-1,0,1\}$, $P_6(x) = a_0 + a_1(x)$

$$\begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{-1} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{cc|c} \underline{2} & -1 & 0 \\ 0 & \underline{2} & 1 \end{array}$$

$a = \left[-\frac{5}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2}\right]$

$\rho_6 = \frac{5}{4}$

$\lambda = -\frac{5}{4}$, $P_6(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$

- $e(-2) = 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(-2)\right) = \frac{3}{4}$
- $e(-1) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(-1)\right) = \frac{5}{4} \rightarrow$ έξοδος
- $e(0) = -1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 0\right) = -\frac{5}{4}$
- $e(1) = 2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1\right) = \frac{5}{4}$
- $e(2) = -2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 2\right) = -\frac{13}{4} \leftarrow$ Είσοδος

$\{X_\psi\} = \{0, 1, 2\}$, $P_\psi(x) = a_0 + a_1(x)$

$$\begin{array}{c} \\ -1 \\ 1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$a^T = \left[\frac{7}{4} \;\; \frac{3}{4} \;\; -\frac{1}{2}\right]$

$\lambda = \frac{7}{4}$ $\quad P_\psi(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x$, $P_\psi = \frac{7}{4} > \frac{5}{4}$

$e(-2) = 0 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(-2)\right) = -7/4$

$e(-1) = 1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(-1)\right) = -1/4$

$e(0) = -1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot 0\right) = -7/4$

$e(1) = 2 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot 1\right) = 7/4$

$e(2) = -2 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cdot 2\right) = -7/4$

Αρα $\quad p^*(x) = P_\psi(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x$

Το $p^*(x) \notin P_2$ γιατί δεν έχουμε σύνολο εναλλασσόμενων σημείων από 4 σημεία.